Kesikli Olasılık Fonksiyonları

X kesikli rastgele değişken olmak üzere X'in her mümkün x değeri için P(x)=P(X=x) in bir olasılık fonksiyonu olabilmesi için aşağıdaki koşulları sağlaması gerekir.

a) $\forall\ x\in\mathbb{R}$ için $P(x)\geq 0$

b) $\sum_{x\in\mathbb{R}} P(X=x)=1$

Sürekli Olasılık Fonksiyonları

X sürekli rastgele değişken olmak üzere X'in her mümkün x değeri için f(x) fonksiyonunun olasılık yoğunluk fonksiyonu olabilmesi için aşağıdaki koşulları sağlaması gerekir.

a) $\forall x\in\mathbb{R}$ için $f(x)\geq 0$

b) $\int_{x\in\mathbb{R}} f(x)dx=1$

Bir rastgele değişkenin olasılık (yoğunluk) fonksiyonu biliniyorsa P(X=a), P(X≥a), P(a≤X≤b) gibi olasılıklar hesaplanabilir.

Örnek: Bir madeni para 2 defa atılıyor. X rastgele değişkeni atışta gelen turaların sayısını göstersin.

a) X rastgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonunu yazınız.

b) Yazdığınız fonksiyonun olasılık fonksiyonu olduğunu gösteriniz.

c) X rastgele değişkeninin olasılık fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

Çözüm: Bu deney için örnek uzay

$\Omega=\{YY,YT,TY,TT\}$

şeklindedir.

X rastgele değişkenlerinin aldığı değerler kümesi $D_x=\{0,1,2\}$ olduğu aşikardır.

a) $P(X=0)=P(\{YY\})=\frac{1}{4}>0$

$P(X=1)=P(\{YT,TY\})=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{2}{4}>0$

P(X=2)=P($\{TT\}$)=$\frac{1}{4} > 0$

olduğundan ∀ x∈ℝ için P(x)≥0 koşulu sağlanmış olur. Buradan X rastgele değişkeninin olasılık fonksiyonu

X=x	0	1	2
P(X=x)	1/4	2/4	1/4

şeklinde bulunur.

b)

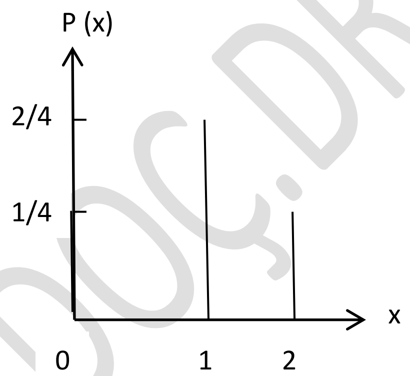
i. ∀ x∈ℝ için P(X=x)≥0 (a şıkkında gösterildi)

ii. $\sum_{x=0}^{2} P(X=x) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2)$

$=\frac{1}{4}+\frac{2}{4}+\frac{1}{4}=1$

Her iki koşul da sağlandığı için elde ettiğimiz fonksiyon bir olasılık fonksiyonudur.

c)



Örnek: Bir balıkçının bir günde tuttuğu ortalama balık miktarını gösteren X rastgele değişkeninin olasılık fonksiyonu,

$$P(X=x)=\begin{cases} \frac{1}{100}.x, & x=1,2,\dots,10 \text{ } için \\ \frac{1}{100}.(20-x), & x=11,12,\dots,20 \text{ } için \\ 0, & dd \end{cases}$$

biçiminde olsun.

a) Verilen fonksiyonun olasılık fonksiyonu olduğunu gösteriniz.

b) Balıkçının tam 8 balık tutma olasılığını hesaplayınız.

c) Balıkçının 8' den az balık tutma olasılığını hesaplayınız.

d) Balıkçının 8' den çok balık tutma olasılığını hesaplayınız.

e) Balıkçının 6 ile 18 arasında balık tutma olasılığını hesaplayınız.

Çözüm:

a)

i. P(x)≥0

ii. $\sum_x P(X=x)=1$

$$\sum_{x=1}^{10} P(X=x)+\sum_{x=11}^{20} P(X=x)=\sum_{x=1}^{10}\frac{1}{100}.x+\sum_{x=11}^{20}\frac{1}{100}(20-x)$$

$$=\frac{55}{100}+\frac{45}{100}=1$$

koşulları sağlandığı için verilen fonksiyon bir olasılık fonksiyonudur.

b) $P(X=8)=\frac{1}{100}.8=0{,}08$

c) $P(X<8)=\sum_{x=1}^{7}\frac{1}{100}.x=\frac{28}{100}=0{,}28$

d) I.yol: $P(X>8)=\sum_{x=9}^{10}\frac{1}{100}.x+\sum_{x=11}^{20}\frac{1}{100}(20-x)=0{,}64$

II.yol: $P(X>8)=1-P(X\leq 8)$

$=1-[P(X=8)+P(X<8)]$

$=1-[0{,}08+0{,}28]$

$=0{,}64$

e) $P(6\leq x\leq 18)=\sum_{x=6}^{10}\frac{1}{100}.x+\sum_{x=11}^{18}\frac{1}{100}.(20-x)$

$$=\left(\frac{1}{100}.6+\frac{1}{100}.7+\frac{1}{100}.8+\frac{1}{100}.9+\frac{1}{100}.10\right)$$

$$+\left(\frac{1}{100}.(20-11)+\frac{1}{100}.(20-12)+\cdots+\frac{1}{100}.(20-18)\right)$$

$$=\frac{40}{100}+\frac{44}{100}=\frac{84}{100}$$

$= 0,84$

BEKLENEN DEĞER VE VARYANS

Kitleyi karakterize eden önemli kavramlardan biri rastgele değişkenlerin momentleridir. Rastgele değişkenlerin momentleri ise beklenen değer ile ilgilidir. X bir rastgele değişken ise X'in herhangi bir fonksiyonu g(X) de bir rastgele değişkendir.

TANIM: Değer kümesi D_x olan bir X rastgele değişkeninin olasılık fonksiyonu veya olasılık yoğunluk fonksiyonu f(x) olsun. g(X) rastgele değişkeninin beklenen değeri

$$\begin{cases}\int_{D_x}|g(x)|f(x)dx<\infty\,, & x\ sürekli\\ \sum_{D_x}|g(x)|f(x)<\infty\,, & x\ kesikli\end{cases}\quad ise\quad \mathrm{E(g(X))}=\begin{cases}\int_{D_x}g(x)f(x)dx\,, & x\ sürekli\\ \sum_{D_x}g(x)f(x)\,, & x\ kesikli\end{cases}$$

şeklindedir.

TANIM: X rastgele değişkeninin olasılık veya olasılık yoğunluk fonksiyonu f(x) ve her k için E(X^k) var olsun. E(X^k) değerine X rastgele değişkeninin k.ıncı momenti denir.

a) k=1 için E(X) değerine X rastgele değişkeninin beklenen değeri denir ve μ ile gösterilir.

b) E$(X-\mu)^k$ değerine X rastgele değişkeninin μ'ye göre k-ıncı merkezi momenti denir.

c) Var(X)=E$(X-\mu)^2$ değerine X rastgele değişkeninin varyansı denir. Var(X) ve σ^2 ile gösterilir ve

$$V(X)=E(X^2)-[E(X)]^2$$

dir. X rastgele değişkeninin varyansının pozitif kareköküne X'in standart sapması denir. X'in varyansı σ^2 ise standart sapması "σ"dır.

d) $t \in \mathbb{R}$ için $M_X(t)$=E(e^{tX}) fonksiyonuna X rastgele değişkeninin moment çıkaran fonksiyonu denir ve $M_X(t)$ ile gösterilir.

e) a,b $\in \mathbb{R}$ için g(X)=aX+b fonksiyonu tanımlansın.

E(g(X))=E(aX+b)=a.E(X)+b

dir.

f) V(g(X))=V(aX+b)=a^2V(X)

Örnek:

- E(2X)=2E(X)
- E(4+5X)=E(4)+E(5X)
  =4+5E(X)
- V(2X)=2^2V(X)
  =4V(X)
- V(5X+4)=V(5X)+V(4)
  =5^2V(X)+0
  = 25V(X)

Bileşenleri X ve Y olan iki boyutlu rastgele vektörün ortak olasılık veya olasılık yoğunluk fonksiyonu f(x,y) olsun. X ve Y aynı örnek uzayında tanımlı birer rastgele değişken ise g(X,Y) de bir rastgele değişkendir. g(X,Y) rastgele değişkeninin beklenen değeri var olması halinde beklenen değer

$$E(g(X,Y))=\begin{cases} \int_{X\in D_x}\int_{Y\in D_x} g(x,y)f(x,y)dydx\ , & x\ sürekli\ ise \\ \sum_{X\in D_x}\sum_{Y\in D_x} g(x,y)\,P(X=x,Y=y), & x\ kesikli\ ise \end{cases}$$

dir. X ile Y arasındaki kovaryans

Cov(X,Y)=E(XY)−E(X).E(Y)

şeklinde hesaplanır. X ile Y arasındaki korelasyon ise,

$$\rho_{xy} = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X).Var(Y)}}$$

şeklindedir.

Örnek: X rastgele değişkeninin olasılık fonksiyonu,

$$f(x)=\begin{cases} \frac{1}{6}, & x = 1,2,3,4,5,6 \\ 0, & dd \end{cases}$$

ise X rastgele değişkeninin beklenen değer (E(X)) ve varyansını (V(X)) bulunuz.

Çözüm: $E(X)=\sum_{x=1}^{6} x.P(X=x) = 1.\frac{1}{6} + 2.\frac{1}{6} + 3.\frac{1}{6} + 4.\frac{1}{6} + 5.\frac{1}{6} + 6.\frac{1}{6} = \frac{21}{6}$

$E(X^2)=\sum_{x=1}^{6} x^2.P(X=x) = 1^2.\frac{1}{6} + 2^2.\frac{1}{6} + 3^2.\frac{1}{6} + 4^2.\frac{1}{6} + 5^2.\frac{1}{6} + 6^2.\frac{1}{6} = \frac{91}{6}$

$V(X)=E(X^2)-[E(X)]^2$

$=\frac{91}{6} - \left(\frac{21}{6}\right)^2 = 2,9$

Örnek: X rastgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f(x)=\begin{cases} \frac{3}{8}x^2, & 0 < x < 2 \\ 0, & dd \end{cases}$$

ise

a) X rastgele değişkeninin beklenen değer (E(X)) ve varyansını (V(X)) bulunuz.

b) E(4X+2) ve V(4X+2) yi bulunuz.

Çözüm:

a) $E(X) = \int_0^2 xf(x)dx = \int_0^2 x\frac{3}{8}x^2dx = \frac{3}{8}\int_0^2 x^3dx = \frac{3}{8}\frac{x^4}{4}\Big]_0^2 = \frac{3}{32}(16-0) = \frac{3}{2}$

$E(X^2) = \int_0^2 x^2f(x)dx = \int_0^2 x^2\frac{3}{8}x^2dx = \frac{3}{8}\int_0^2 x^4dx = \frac{3}{8}\frac{x^5}{5}\Big]_0^2 = \frac{3}{40}(32-0) = \frac{12}{5}$

$$V(X) = E(X^2) - \left(E(X)\right)^2$$

$$= \frac{12}{5} - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{3}{20}$$

b) $E(4X+2) = 4E(X) + 2 = 4.\frac{3}{2} + 2 = 8$

$V(4X+2) = 16V(X) = 16.\frac{3}{20} = \frac{48}{20}$

Kaynaklar

1. Akdi, Y. (2010). Matematiksel İstatistiğe Giriş, Gazi Kitabevi, Ankara.
2. Sağlam, V., Sağır, M. ve Yücesoy, E. (2018). Olasılığa Giriş, Güncellenmiş 3. Baskı, Seçkin Yayınevi.
3. Akdeniz, F. (2007). Olasılık ve İstatistik, Nobel Kitabevi.
4. Hogg, R. V. and Craing, A. T. (1989). Introduction to Mathematical Statistics. 4th Ed., New York: Macmillan Publishing Co.
5. Larson, H. J. (1982). Introduction to Probability Theory and Statistical Inference. 3rd Ed., New York: John Wiley ve Sons.
6. Ross, M,R. (2012) Olasılık ve İstatistiğe Giriş-Mühendisler ve Fenciler için, 4. Basımdan Çeviri, Nobel Kitabevi.
7. Mendenhall, W., Wackerly, D. D. and Scheaffer, R. (1990). Mathematical Statistics with Applications. 4th Ed., Boston: PWS-Kent Publishing Company.
8. Erbaş, S.O. (2007). Olasılık ve İstatistik, İkinci Baskı, Gazi Kitabevi.